DEVELOPPEMENT 2 : MINIMISATION D'UNE FONCTIONNELLE CONVEXE SUR UN HILBERT

Théorème : Soit $(H \mid (\cdot \mid \cdot))$ un espace de Hilbert séparable. Soit U une partie convexe fermée non vide de H et soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe, différentiable et coercive si U est non borné.
Alors il existe au moins un $u \in U$ tel que $f(u) = \inf_{v \in U} f(v)$.

À reformuler.

Démonstration : 1) Dans un premier temps on se ramène au cas où U est borné :

Rmq : si U est non borné on peut se ramener au cas où U est borné puisque f est supposée coercive. En effet, si $u_0 \in U$, comme $\lim_{\|v\| \to +\infty} f(v) = +\infty$ il existe $r > 0$ tel que $\|v\| > r \implies f(u_0) < f(v)$.
Ainsi si on note $U_0 = U \cap \{v \in H \,/\, \|v\| \leq r\}$, U_0 est convexe fermé borné et l'ensemble des solutions du problème $f(u) = \inf_{v \in U} f(v)$ coïncide avec celui des solutions du problème $f(u) = \inf_{v \in U_0} f(v)$.

2) (*) On note maintenant $a = \inf\{f(v) \,/\, v \in U\}$ (On a éventuellement $a = -\infty$) si f est minorée, sinon, par convention on prend $a = -\infty$.
Par définition de a il existe $(u_n)_n \in U^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = a$.

Comme U est borné il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\| \leq C$.
Comme H est supposé séparable il existe $(v_k)_k$ un sous-ensemble dénombrable dense dans H.

Soit $x \in H$ et soit $k \geq 0$.
On a $|(x \mid u_k)| \leq C\|x\|$ par Cauchy-Schwarz donc la suite $((x \mid u_k))_k$ est bornée dans $\mathbb{R}$.
En particulier $((v_1 \mid u_k))_k$ est bornée donc on peut en extraire une sous-suite $((v_1 \mid u_{\varphi_1(k)}))_k$ qui converge.
De même, la suite $((v_2 \mid u_{\varphi_1(k)}))_k$ est bornée donc on peut en extraire une sous-suite $((v_2 \mid u_{\varphi_2 \circ \varphi_1(k)}))_k$ qui converge.
Et ainsi de suite : si $p \in \mathbb{N}^*$ fixé on construit des applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ strictement croissantes telles que $((v_p \mid u_{\varphi_p \circ \cdots \circ \varphi_1(k)}))_k$ converge.

On considère alors la suite donnée par $a_k = u_{\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1(k)}$.

inutile (Comme $k \to +\infty$ on a, à partir d'un certain rang $\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(k) \geq \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_p(k)$.)

Ainsi la suite $((v_p \mid a_k))_k$ converge. arguments : $\varphi = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k$ est strictement croissante ($\varphi_j(p) > p$) et $(u_{\varphi(k)})_k$ est extraite de $(u_{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_p(k)})_k$.

Soit $v \in H$ et soit $\varepsilon > 0$.
Montrons que $((v \mid a_k))_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}, |\cdot|$ donc converge.
On sait que $(v_k)_k$ est dense dans H donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ $\|v - v_{k_0}\| \leq \varepsilon/4C$.

Comme $((v_{k_0} \mid a_k))_k$ converge, elle est de Cauchy donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N \quad |(v_{k_0} \mid a_n) - (v_{k_0} \mid a_m)| \leq \varepsilon/2.$$

Ainsi, si $n, m \geq N$ on a :

$$|(v|a_n)-(v|a_m)| \leq |(v_{k_0}|a_n-a_m)|+|(v-v_{k_0}|a_n-a_m)|$$
$$\leq \varepsilon/2 + \|v-v_{k_0}\|(\|a_n\|+\|a_m\|)$$
$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/4C \times 2C.$$

donc $((v|a_k))$ converge dans $\mathbb{R}$.

Notons $g: H \to \mathbb{R}$, $g \mapsto \lim_{k\to+\infty}(v|a_k)$ — g est linéaire et continue sur H car $|g(v)| \leq C\|v\| \quad \forall v \in H$.

3)$^{(**)}$ D'après le théorème de Riesz il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall v \in H$ $g(v) = (v|u)$

donc $\forall v \in H \quad \lim_{k\to+\infty}(v|a_k) = (v|u)$.

Notons $p: H \to U$ l'opérateur de projection sur U (U convexe fermé non vide).

On a $\forall k \in \mathbb{N} \quad (p(u)-u \mid a_k - p(u)) \leq 0$

donc $0 \leq \lim_{k\to+\infty}(p(u)-u|a_k-p(u)) = (p(u)-u|u-p(u))$
$= -\|p(u)-u\|^2 \leq 0$

donc $p(u) = u$ et $u \in U$.

L'application $f: U \to \mathbb{R}$ est différentiable et convexe donc

$\forall k \geq 0 \quad f(a_k) \geq f(u) + Df(u)(a_k-u) = f(u) + (\nabla f(u)|a_k-u)$

$Df(u) \in H'$ donc d'après Riesz $\exists!\ \nabla f(u)$ (vecteur de H) tel que $\forall v \in H$ $Df(u)(v) = (\nabla f(u)|v)$

donc $\liminf_{k\to+\infty} f(a_k) \geq \underbrace{\lim_{k\to+\infty}(\nabla f(u)|a_k-u)}_{=0} + f(u)$.

Comme $(a_k)_k$ est extraite de $(u_k)_k$ on a :

$$f(u) \leq \liminf_{k\to+\infty} f(a_k) = \lim_{k\to+\infty} f(u_k) = a = \inf_{v\in U} f(v).$$

2)$^{(*)}$ On considère $(u_n)_n \in U^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \inf\{f(v), v \in U\}$.
On montre qu'il existe une suite extraite $(a_k)_k$ de $(u_k)_k$ telle que $\forall v \in H$ la suite $((v|a_k))_k$ converge

3)$^{(**)}$ On montre qu'il existe $u \in U$ tel que $\lim_{k\to+\infty}(v|a_k) = (v|u) \quad \forall u \in U$ et on conclut.

Rmq : hypothèse de séparabilité inutile.

Cas H Hilbert quelconque : On considère une suite $(x_n)_n$ bornée dans H

On note $G = \overline{\mathrm{vect}(x_n, n\in\mathbb{N})}$ ... vu en cours.